

# 压缩感知中确定性测量矩阵构造算法综述

王 强, 李 佳, 沈 毅

(哈尔滨工业大学控制科学与工程系, 黑龙江哈尔滨 150001)

**摘 要:** 测量矩阵在压缩感知中起着关键性的作用, 其性能会影响原始信号的压缩与重构. 现有的测量矩阵多数为随机的, 它们在实际应用中有存储量大、效率低等缺点, 且在硬件上难以实现, 故构造确定性测量矩阵对压缩感知理论的推广与应用具有重要的意义. 本文回顾了国内外学者在确定性测量矩阵构造方面的研究, 着重对目前已有的构造算法进行详细的介绍和分类, 最后根据多种指标综合评述了各种算法的性能.

**关键词:** 压缩感知; 确定性测量矩阵; 有限等距性质; 信号重构

**中图分类号:** TN911.7      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2013) 10-2041-10

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.10.027

## A Survey on Deterministic Measurement Matrix Construction Algorithms in Compressive Sensing

WANG Qiang, LI Jia, SHEN Yi

(Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China)

**Abstract:** Measurement matrix, whose performance can affect the compression and reconstruction of original signal, plays a key role in compressive sensing. Most of the existing measurement matrices are random ones, which have shortcomings in practical application, such as large storage capacity, low efficiency and difficulty when implemented in the hardware. Therefore, it is of important practical significance to construct deterministic measurement matrix for the promotion and application of the compressive sensing theory. In this paper, the existing construction algorithms for deterministic measurement matrix are reviewed, introduced and classified in detail. Finally the performances of all algorithms are summarized in terms of common indicators.

**Key words:** compressive sensing (CS); deterministic measurement matrix; restricted isometry property; signal reconstruction

### 1 引言

在过去的半个世纪里, 奈奎斯特采样定理一直要求信号的采样率不低于信号带宽的 2 倍, 这样才可不失真的实现重构. Donoho 等人在信号分解和逼近理论基础上提出的压缩感知 (Compressive Sensing, CS) 可克服奈奎斯特采样定理<sup>[1,2]</sup>, 实现信号的同时采样与压缩<sup>[3]</sup>. 压缩感知的核心是利用测量矩阵将高维稀疏信号投影到一个低维空间上, 然后利用信号的稀疏性, 通过重构算法实现原始信号的恢复. 压缩感知理论研究主要包含信号稀疏表示、测量矩阵构造和重构算法设计三个方面.

信号稀疏表示是将该信号投影到某正交基或冗余字典<sup>[4,5]</sup>上时, 对应的表示系数中只有少数是非零的. 若系数中仅有少数是显著的, 其余都很小, 则称该信号是可压缩的. 压缩感知理论所研究的对象是可稀疏表示或可压缩的信号. 常用的正交基有 DCT 基、FFT 基、DWT

基等<sup>[6]</sup>. 在 CS 压缩投影过程中, 并非直接测量稀疏信号本身, 而是将其投影成低维测量值. 测量矩阵是压缩感知的核心之一, 在信号压缩投影和重构过程中起着重要的作用. 总体来说, 好的测量矩阵能够在投影测量时保持原始信号的重要信息, 并可结合测量值重构出原始信号. 为保证投影测量值中能保持原始信号的绝大部分能量, 测量矩阵需满足一定条件, 如有限等距性质 (Restricted Isometry Property, RIP)<sup>[3]</sup>、列相干性<sup>[7]</sup>、零空间特性等<sup>[8]</sup>. 最后通过重构算法恢复原始信号, 此过程可转换为最小  $l_1$  或  $l_0$  范数问题的求解<sup>[9,10]</sup>.

CS 重构算法分为两类: 一为  $l_1$  范数最小化算法, 包括内点法 (Interior Point, IP)<sup>[11]</sup>、梯度投影 (Gradient Projection)<sup>[12]</sup> 及同伦 (Homotopy)<sup>[12]</sup> 等, 此类方法统称凸优化算法, 重建精度高, 需要的测量次数少, 但是计算复杂度相对较高; 另一类为  $l_0$  范数最小化算法, 包括匹配追踪 (Matching Pursuit, MP)、正交匹配追踪 (Orthogonal MP,

OMP)<sup>[13]</sup>、子空间追踪(Subspace Pursuit, SP)<sup>[14]</sup>及压缩采样匹配追踪(Compressive Sampling MP, CoSaMP)<sup>[15]</sup>等. 此类算法称为贪婪算法, 其特点是计算复杂度低, 但需要较多的测量次数, 且重建精度低.

## 2 压缩感知基本理论

根据信号稀疏分解理论,  $N$  维离散实值信号  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  可以表示为一组标准正交基的线性组合

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\psi}_k \alpha_k = \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\alpha} \quad (1)$$

式中  $\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\Psi}_1, \boldsymbol{\Psi}_2, \dots, \boldsymbol{\Psi}_N]$  是  $N \times N$  矩阵, 称为基矩阵. 若  $\boldsymbol{\alpha}$  中只有  $K (K \ll N)$  个非零系数, 则称  $\mathbf{x}$  在基矩阵  $\boldsymbol{\Psi}$  下是  $K$  稀疏信号. 若信号的变换系数经排序后按指数级衰减趋近于零, 则信号是可压缩的(亦称近似稀疏).

压缩感知具体过程如下: 设长度为  $N$  的信号  $\mathbf{x}$ , 通过投影到一组单位向量(亦称原子)  $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1, \dots, \boldsymbol{\phi}_M]$  上, 得到测量值  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^M (M \ll N)$ , 此过程可表示为:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x} \quad (2)$$

将式(1)带入式(2), 得

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\alpha} \quad (3)$$

上式中矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  和  $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Psi}$  大小均为  $M \times N$ , 分别称为测量矩阵与感知矩阵.

由于测量值维数  $M \ll N$ , 求解式(2)的过程是病态的, 所以无法直接从  $\mathbf{y}$  中解出原始信号  $\mathbf{x}$ . 但由于  $\boldsymbol{\alpha}$  是稀疏的, 故可利用已知的感知矩阵  $\boldsymbol{\Theta}$  通过 CS 重构算法近乎完美地得到估计信号  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ , 进而由  $\hat{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Psi} \hat{\boldsymbol{\alpha}}$  来逼近原始信号  $\mathbf{x}$ . 信号压缩感知的过程如图 1 所示.

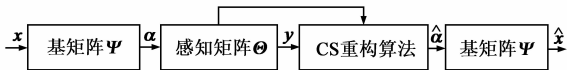


图1 压缩感知过程图

若原始信号  $\mathbf{x}$  是  $K$  稀疏的, 则选择基矩阵  $\boldsymbol{\Psi}$  为单位矩阵. 若测量矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  满足一定条件, 信号  $\mathbf{x}$  可通过下述最小  $l_0$  范数最优化问题精确重构<sup>[3]</sup>

$$\min_x \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{s.t. } \mathbf{y} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x} \quad (4)$$

上述求解问题是 NP-hard. 由于最小  $l_0$  与  $l_1$  范数问题在一定条件下是等价的<sup>[16,17]</sup>, 故式(4)可转化为

$$\min_x \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{s.t. } \mathbf{y} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x} \quad (5)$$

若要精确重构  $K$  稀疏信号  $\mathbf{x}$ , 测量矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  须满足下述定义的 RIP<sup>[18]</sup>.

**定义 1** 定义测量矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  的 RIP 参数  $\delta_K$  为满足下式的最小值  $\delta$

$$(1 - \delta) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\boldsymbol{\Phi} \mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta) \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (6)$$

其中  $\mathbf{x}$  为  $K$  稀疏信号. 若  $\delta_K < 1$ , 则称测量矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  满足  $K$  阶 RIP.

RIP 对测量矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  的任意  $K$  个列组成矩阵  $\boldsymbol{\Phi}_\Delta$  进行限制, 即

$$1 - \delta_k \leq \lambda_{\min} \leq \lambda_{\max} \leq 1 + \delta_k \quad (7)$$

其中  $\Delta \subset \{1, \dots, N\}$  且  $|\Delta| = K$ ,  $\lambda_{\min}$  和  $\lambda_{\max}$  分别为矩阵  $\mathbf{G} = \boldsymbol{\Phi}_\Delta^T \boldsymbol{\Phi}_\Delta$  的最小和最大特征值. 对任一冗余矩阵, 很难验证其是否满足 RIP, 且用 RIP 指导构造测量矩阵也是不现实的. 很多学者尝试用相干性理论来弱化 RIP<sup>[19]</sup>.

**定义 2** 定义测量矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  的列相干性如下

$$\mu = \max_{1 \leq i, j \leq N, i \neq j} |\langle \boldsymbol{\phi}_i, \boldsymbol{\phi}_j \rangle| \quad (8)$$

其中  $\boldsymbol{\phi}_i$  为  $\boldsymbol{\Phi}$  的第  $i$  列. 若  $N \leq M(M+1)/2$ , 则冗余矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  的列相干性有下界(亦称为 Welch 界)

$$\mu \geq \mu_w = \sqrt{\frac{N-M}{(N-1)M}} \quad (9)$$

且式(9)中等号成立时, 称该矩阵为等角紧结构(Equiangular Tight Frame, ETF)<sup>[5,20]</sup>.

**定义 3** 对任一正整数  $K$ , 定义测量矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  的累积相干性函数如下

$$\mu_1(K) = \max_{|\Delta|=K} \max_{1 \leq i \leq N, i \notin \Delta} \sum_{j \in \Delta} |\langle \boldsymbol{\phi}_i, \boldsymbol{\phi}_j \rangle| \quad (10)$$

其中  $\Delta \subset \{1, \dots, N\}$ .

除此之外, 零空间特性等指标都可用来衡量测量矩阵的性能<sup>[8]</sup>. 它们之间存在内在的联系, 例如①RIP 和相干性理论的关系可以描述为测量矩阵  $K$  阶 RIP 参数  $\delta_K$  小于  $\mu_1(K-1)$ ; ②RIP 保证式(4)的解是唯一的, 即稀疏信号不在  $\boldsymbol{\Phi}$  的零空间内.

高斯随机矩阵<sup>[1]</sup>、伯努利随机矩阵<sup>[1]</sup>等已被证实可适用于压缩感知, 但应用上述随机矩阵存在瓶颈: 首先, 随机数的产生对硬件要求很高; 其次, 压缩投影和信号重构过程需要进行存储和传输测量矩阵, 这对系统的要求很高; 最后, 随机矩阵只在统计意义下以很高的概率满足 RIP 和弱相干性, 即不能保证每个随机产生的矩阵都满足特定 RIP 或相干性条件, 因而不能保证每次都精确的恢复原始信号. 基于上述随机测量矩阵在实际应用中的缺点, 确定性测量矩阵的研究对于压缩感知理论的推广与应用尤其重要.

## 3 确定性测量矩阵构造算法分类

压缩感知中确定性测量矩阵构造算法从构造角度可分为四类: ①基于有限域的测量矩阵: 从特定有限域出发, 寻找满足 RIP 的测量矩阵; ②基于编码的测量矩阵: 针对特定的编码或结构构造可适用于压缩感知的测量矩阵; ③基于训练的测量矩阵: 输入随机矩阵, 结合基矩阵  $\boldsymbol{\Psi}$ , 训练出接近 ETF 的测量矩阵; ④最大 Welch 界等式测量矩阵: 从理论分析和数值搜索方向探索构造最大 Welch 界等式测量矩阵用于压缩感知. 本文

将按照上述四类构造算法进行分类介绍和分析,来明确构造算法的核心思想。

### 4 基于有限域的测量矩阵

已证实,从有限域出发可构造满足 RIP 的确定性测量矩阵,即可用于压缩感知<sup>[21]</sup>。

#### 4.1 多项式确定性测量矩阵

Devore 提出通过有限域中多项式的取值来构造矩阵<sup>[21]</sup>。其中心思想是在元素个数为素数  $p$  的有限域  $F$  中,将  $p \times p$  矩阵  $E$  按列排列成  $M \times 1$  的向量,矩阵  $E$  的第  $x$  列第  $Q(x)$  行元素为 1,其余为零,其中  $Q(x)$  为自变量和函数值均在  $F$  中取值的最高次幂小于或等于自然数  $r$  的多项式,  $M = p^2, 0 < r < p$ 。当取完所有多项式系数时,共有  $N = p^{r+1}$  个列向量,从而构成  $M \times N$  矩阵  $\Phi_0$ ,测量矩阵

$$\Phi = (1/\sqrt{p})\Phi_0 \quad (11)$$

满足以  $\delta = (K-1)r/p$  为参数的 RIP,其中  $K < p/r + 1$ 。

重构二维图像时,选用合适重构算法,多项式确定性测量矩阵重构效果优于高斯随机矩阵。但此类矩阵的缺陷在于:矩阵大小受限制,不适宜广泛应用;当  $p$  较小时,矩阵构造速度较快,但当  $p$  的取值越大,其构造时间越长,且以惊人的速度增长,极大限制了其在实际中的应用。

为克服上述缺陷,文献[22]提出下述以维数较小的多项式确定性测量矩阵  $\Phi_B$  为块的对角矩阵

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_B & & \\ & \ddots & \\ & & \Phi_B \end{bmatrix} \quad (12)$$

该矩阵满足 RIP,易于硬件实现,构造时间与  $\Phi_B$  相当, $M$  是  $p^2$  的整数倍扩大了应用范围,且可作为稀疏矩阵存贮。当分块的块数太多时,对矩阵重建效果有一定影响。实际应用中,应该合理地选择小块矩阵的大小。

#### 4.2 基于膨胀图的确定性测量矩阵

基于膨胀图的研究受到了很多的关注<sup>[23,24]</sup>。对二部图  $(A, B)$ ,左子图顶点的度是  $N$ ,右子图顶点的度为

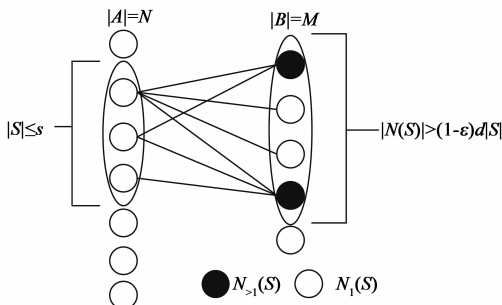


图2 膨胀图  $(s, d, \epsilon)$

$M$ ,若  $A$  中至多  $s$  个顶点构成的子集  $S$  在右子图中至少有  $(1 - \epsilon)d|S|$  个邻接点,则称为  $(s, d, \epsilon)$  膨胀图,如图 2 所示。

对任意常数  $\alpha > 0, n, s, \epsilon > 0$ ,存在膨胀图左顶点数为  $N = o((\log(n)/\epsilon)^{1+1/\alpha})$ ,右顶点数为  $M = o(d^2 s^{1+\alpha})$ ,此膨胀图的邻接矩阵对所有的  $s$  稀疏信号满足 RIP-1<sup>[23,24]</sup>。但此类算法的缺陷在于很难找到上述确定结构的膨胀图,文献[25]提出了一种基于有限域的次优膨胀图结构,其构造过程如下:

(1)建立二部图的左右子图  $A$  和  $B$ ,其中  $|A| = N, |B| = M$ ;

(2)固定有限域  $\mathbb{Q}_q = \{a_1, \dots, a_q\}$ ,左子图对应定义在  $\mathbb{Q}_q$  上不超过  $n-1$  次的多项式集合  $\mathbb{Q}_q^n$ ,每个多项式对应一个顶点,即  $N = q^n$ 。右子图对应定义在  $\mathbb{Q}_q$  上不超过  $m$  次的多项式集合  $\mathbb{Q}_q^{m+1}$ ,每个多项式对应一个顶点,即  $M = q^{m+1}$ ;

(3)将左子图的任意顶点  $f_0$  对应的多项式  $f_0(Y)$  生成 Parvaresh-Vardy 编码

$$f_i(Y) = (f_0(Y))^{h^i} \text{ mod } E(Y), i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (13)$$

其中  $E(Y)$  是  $n$  次不可约多项式,  $Y$  是自变量,  $h^i$  为正整数;

(4)将左、右子图的两边顶点进行对应,如图 3 所示,对应法则为

$$\Gamma(f_0, y) = [y, f_0(y), f_1(y), \dots, f_{m-1}(y)] \quad (14)$$

其中  $f_0$  的第  $y$  个邻接点  $\Gamma(f_0, y)$  为  $[y, f_0(y), f_1(y), \dots, f_{m-1}(y)]$  表示的多项式。构造如图 3 所示,且此二部图是膨胀图。

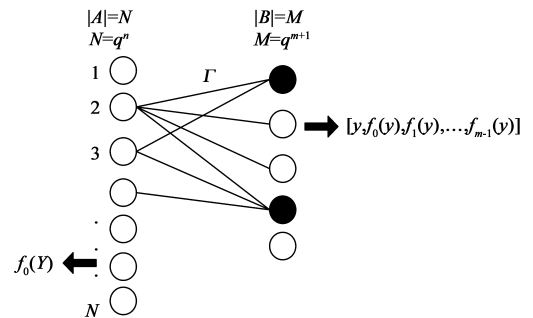


图3 二部图构造示意图

(5)根据膨胀图生成  $M \times N$  邻接矩阵,左、右子图两边顶点若对应为邻接点则相应元素置为 1,若对应为非邻接点则为 0。

除此之外,文献[26]提出利用有限域上的代数曲线来构造测量矩阵,且通过选择合适的曲线,可得到性能更优的确定性测量矩阵。

## 5 基于特定编码的确定性测量矩阵

文献[27]提出统计有限等距性质(Statistical RIP, StRIP)和保证唯一性的统计有限等距性质(Uniqueness guaranteed StRIP, UStRIP)来衡量基于特定编码的确定性测量矩阵的性能.

**定义 4** 称测量矩阵  $\Phi$  满足  $(K, \delta, \epsilon)$ -StRIP, 若对任意  $K$  稀疏信号  $\mathbf{x}$ , 下式以超过  $1 - \epsilon$  的概率成立

$$(1 - \delta) \|\mathbf{x}\|^2 \leq \left\| \left( \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \Phi \mathbf{x} \right\|^2 \leq (1 + \delta) \|\mathbf{x}\|^2 \quad (15)$$

**定义 5** 称测量矩阵  $\Phi$  满足  $(K, \delta, \epsilon)$ -UStRIP 条件, 若  $\Phi$  满足 StRIP 条件, 且以超过  $1 - \epsilon$  的概率满足下述解的唯一性

$$\{\beta \in \mathbf{R}^N; \Phi \alpha = \Phi \beta\} = \{\alpha\} \quad (16)$$

矩阵  $\Phi$  的条件数定义为

$$c(\Phi) = \sigma_{\max}(\Phi) / \sigma_{\min}(\Phi) \\ = \sqrt{\lambda_{\max}(\Phi^T \Phi) / \lambda_{\min}(\Phi^T \Phi)} \quad (17)$$

由式(7)可知, 测量矩阵的条件数越小, 其满足 RIP 的概率越高.

### 5.1 离散 Chirp 编码确定性测量矩阵

文献[28]提出将离散 Chirp 编码作为列向量构造测量矩阵的思想.  $M$  维 Chirp 信号定义如下

$$v_{k,r}(m) = \alpha \cdot e^{\frac{j2\pi km}{M}} e^{\frac{j2\pi rm^2}{M}}, k, r \in \mathbf{Z}_M \quad (18)$$

其中  $m$  取  $1, 2, \dots, M$ ,  $r$  是 Chirp 率,  $j$  是虚数单位,  $k$  是基频率. 对  $M$  维 Chirp 信号,  $(k, r)$  有  $N = M^2$  种组合. 取  $\alpha = 1$ , 构造  $M \times M^2$  测量矩阵  $\Phi$  如下

$$\Phi_{m,n} = e^{\frac{j2\pi km}{M}} e^{\frac{j2\pi rm^2}{M}}, n = Mr + k \in \mathbf{Z}_{M^2} \quad (19)$$

此矩阵的重构性能与高斯随机矩阵相当, 且当信号稀疏度  $K$  满足  $K < (\sqrt{M} + 1)/2$  时, 通过此类测量矩阵可实现精确重构原始稀疏信号. 此类矩阵满足 UStRIP, 且构造复杂度仅依赖于  $M$ . 但其在维数方面的限制使得其在  $M$  很小的情况下不适用.

### 5.2 二阶 Reed-Muller 编码确定性测量矩阵

二阶 Reed-Muller 函数定义为

$$\varphi_{P,b}(a) = \frac{(-1)^{wt(b)}}{\sqrt{2^m}} i^{(2b+Pa)^T a}, a, b \in \mathbf{Z}_2^m \quad (20)$$

其中  $P$  是二值对称矩阵,  $a$  和  $b$  为  $m$  维二值向量,  $wt(b)$  是  $b$  的权重, 即  $b$  中 1 的个数. 针对矩阵  $P$  (对角线元素为 0), 构造正交基  $F_P = \{\varphi_{P,b} | b \text{ 为二值向量}\}$ , 其中  $\varphi_{P,b}$  为  $2^m$  维列向量,  $F_P$  的列数为  $2^m$ , 则  $F_P$  的酉矩阵  $U_P$  大小为  $2^m \times 2^m$ . 由于有  $m(m-1)/2$  个  $P$ , 则可构造下述大小  $2^m \times 2^{m(m+1)/2}$  满足 UStRIP 的矩阵<sup>[27,29]</sup>

$$\Phi = (U_{P_1}, U_{P_2}, \dots, U_{P_{\frac{m(m-1)}{2}}}) \quad (21)$$

除此之外, BCH 编码<sup>[27]</sup>、OOC 编码<sup>[30]</sup>及 p-Ary 块编

码<sup>[31]</sup>等均可用来构造测量矩阵.

Bajwa 等人<sup>[32,33]</sup>提出元素服从特定分布的托普利兹矩阵会以较大概率满足 RIP.

### 5.3 离散编码托普利兹确定性测量矩阵

文献[34]提出离散编码托普利兹确定性矩阵, 该编码是下述高阶 Chirps 信号

$$\mu(t) = \exp(j2\pi \rho t^3) \quad (22)$$

其中  $\rho$  是无理数. 记  $\mu(t) = \mu_t$ , 构造  $M \times N$  矩阵如下

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mu_N & \mu_{N-1} & \cdots & \mu_2 & \mu_1 \\ \mu_{N+1} & \mu_N & \cdots & \mu_3 & \mu_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{M+N-1} & \mu_{M+k-2} & \cdots & \cdots & \mu_M \end{bmatrix} \quad (23)$$

此测量矩阵满足 RIP, 且  $M$  越大测量矩阵  $\Phi$  条件数越小. 当  $\rho$  为黄金分割时, 对充分大的  $N$ , 存在  $\lambda < 1$  使  $\lambda N \times N$  的测量矩阵满足 RIP.

### 5.4 轮换托普利兹确定性测量矩阵

Holger 将轮换托普利兹矩阵引入压缩感知<sup>[35]</sup>. 其构造方式: 将随机生成的元素  $\pm 1$  的编码  $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$  作为矩阵的第一行, 依次采用下述循环方式获得矩阵  $\Phi_b$  第二至第  $N$  行

$$\varphi_{i,j} = b_{j-i \bmod N}, i, j = 1, \dots, N \quad (24)$$

从  $\Phi_b$  中任意或确定选取指标集  $\Omega$  ( $|\Omega| = M$ ) 对应的  $M$  行获得矩阵  $\Phi_{\Omega,b}$ , 且有下列结论:

(1) 当  $\mathbf{b}$  是随机拉德马赫序列且选取固定的  $M$  行, 矩阵见式(25), 满足 RIP;

$$\Phi = (1/\sqrt{M}) \Phi_{\Omega,b} \quad (25)$$

(2) 当  $\mathbf{b}$  是随机拉德马赫序列且  $\Omega$  随机选取时, 式(25)中矩阵以不低于  $1 - \epsilon$  的概率满足下述条件

$$\mu \leq 4 \log(2N^2/\epsilon) / \sqrt{M} \quad (26)$$

该矩阵只需存储  $N$  维向量, 可大大节省空间. 但重复出现的  $\pm 1$  易产生很强的列相干性, 且单一行循环的构造方式难以体现列向量的独立随机性.

## 6 基于训练的确定性测量矩阵

由测量矩阵  $\Phi$  和基矩阵  $\Psi$  的不相干性可探讨感知矩阵  $\Theta = \Phi\Psi$  是否满足 RIP. 由于  $\Psi$  是已知的, 故可通过不同算法训练测量矩阵  $\Phi$  使  $\Theta$  接近 ETF 或其不同列尽可能正交的测量矩阵<sup>[43]</sup>.

### 6.1 交互投影算法

当  $\Psi$  为单位矩阵时, 交互投影 (Alternating Projection, AP) 算法可用来构造 ETF 矩阵<sup>[36,37]</sup>. 分别定义下述理想矩阵集合  $\mathcal{H}$  和 Gram 矩阵集合  $\mathcal{G}$ :

$$\mathcal{H} = \{H \in \mathbf{C}^{N \times N}; H = H^T, H(i, i) = 1, \\ \text{且 } |H(i, j)| < \mu_w, 1 \leq i, j \leq N\} \quad (27)$$

$\mathcal{G} = \{G \in \mathbf{C}^{N \times N}; G = G^T \text{ 且 } G \text{ 有特征值}$

$$\underbrace{(N/M, \dots, N/M, 0, \dots, 0)}_M \quad (28)$$

具体算法如算法 1 所示.

### 算法 1 交互投影算法

输入:最大迭代次数  $\text{Iter}_{\max}$ ;  
 初始化:列单位化的高斯随机矩阵  $\Phi$ ; Gram 矩阵  $G_1 = \Phi^T \Phi$ ;  
 循环:迭代次数  $j = 1: \text{Iter}_{\max}$   
 1.  $H_j = \operatorname{argmin} \|H - G_j\|_F$  s. t.  $H \in \mathcal{H}$ ;  
 2.  $G_{j+1} = \operatorname{argmin} \|G - H_j\|_F$  s. t.  $G \in \mathcal{G}$ ;  
 结束循环输出 Gram 矩阵  $\hat{G}$   
 应用 SVD 分解并将矩阵  $\hat{G}$  的秩降到  $M$ ;  
 求  $\hat{G}$  的平方根  $\hat{\Phi}$ , 即求解  $\hat{\Phi}^T \hat{\Phi} = \hat{G}$ ;  
 输出:测量矩阵  $\hat{\Phi}$ .

其中  $H_j$  和  $G_j$  分别表示第  $j$  次迭代结果.

此算法构造的测量矩阵可满足压缩感知中对测量矩阵的列相干性要求. 由文献[36]中表 1 可知, 该算法只在有限的  $(M, N)$  上可构造 ETF 矩阵, 故其在实际应用中受限.

### 6.2 Elad 算法

针对固定的基矩阵  $\Psi$ , Elad<sup>[38]</sup> 定义下述  $t$  平均互相关函数  $\mu_t(\Theta)$  来衡量矩阵  $\Theta$  的性能

$$\mu_t(\Theta) = \frac{\sum_{1 \leq i, j \leq N, i \neq j} (g_{ij} \geq t) \cdot |g_{ij}|}{\sum_{1 \leq i, j \leq N, i \neq j} (g_{ij} \geq t)} \quad (29)$$

其中  $g_{ij}$  为  $\Phi$  和  $\Psi$  不同列的内积. Elad 算法如算法 2 所示.

### 算法 2 Elad 算法

输入:相干性阈值  $t$  或  $t\%$ ; 递减系数  $\gamma$ ; 基矩阵  $\Psi$ ;  
 最大迭代次数  $\text{Iter}_{\max}$ ; 测量数  $M$ ;  
 初始化:列单位化的高斯随机矩阵  $\Phi_1$ ;  
 循环:迭代次数  $q = 1: \text{Iter}_{\max}$   
 1. 列单位化矩阵  $\Theta = \Phi_q \Psi$  得到矩阵  $\hat{\Theta}_q$ ;  
 2. 矩阵  $\hat{G}_q = \hat{\Theta}_q^T \hat{\Theta}_q$ ;  
 3. 若循环方式固定, 选  $t$  为阈值; 否则选取  $t$  使其小于  $\hat{G}_q$  中  $t\%$  的非对角线元素;  
 4. 更新矩阵  $\hat{G}_q$

$$\hat{g}_{ij} = \begin{cases} \gamma g_{ij}, & |g_{ij}| \geq t \\ \gamma t \cdot \operatorname{sign}(g_{ij}), & t \geq |g_{ij}| \geq \gamma t; \\ g_{ij}, & \gamma t \geq |g_{ij}| \end{cases}$$

5. 对  $\hat{G}_q$  应用 SVD 并将矩阵的秩降至  $M$ ;  
 6. 求  $\hat{G}_q$  的平方根  $S_q$ , 即求解  $S_q^T S_q = \hat{G}_q$ ;  
 7. 最小化  $\|S_q - \Phi \Psi\|_F^2$  更新测量矩阵  $\Phi_{q+1}$ ;  
 输出:测量矩阵  $\hat{\Phi}$ .

相比高斯随机矩阵, Elad 算法构造矩阵  $\hat{\Phi}$  对应的

感知矩阵  $\hat{\Theta} = \hat{\Phi} \Psi$  具有更低的列相干性, 同时  $\gamma$  越小, 算法收敛越快. 但此算法计算复杂度高, 同时步骤 4 中过程会在不影响感知矩阵的  $t$  平均互相关函数基础上削弱测量矩阵满足 RIP 的程度.

### 6.3 Duarte-Carvajalino 算法

针对固定的基矩阵  $\Psi$ , Duarte-Carvajalino 等人<sup>[39]</sup> 提出训练矩阵  $\Theta$  来使 Gram 矩阵  $G = \Theta^T \Theta$  尽可能接近单位矩阵  $I_N$  的算法, 即

$$G = \Theta^T \Theta = \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi \approx I_N \quad (30)$$

式(30)左乘  $\Psi$ , 右乘  $\Psi^T$  得

$$\Psi \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi \Psi^T \approx \Psi \Psi^T \quad (31)$$

若  $\Psi \Psi^T$  有特征值分解  $\Psi \Psi^T = \Lambda \Lambda^T$ , 则式(31)转化为

$$\Lambda \Lambda^T \Phi^T \Phi \Lambda \Lambda^T \approx \Lambda \Lambda^T \quad (32)$$

记  $\Gamma = \Phi \Lambda$ , 则问题转化为求解  $\hat{\Gamma}$  使下述目标函数值最小化

$$\|\Lambda - \Lambda \Gamma^T \Gamma \Lambda\|_F^2 \quad (33)$$

进而由  $\hat{\Phi} = \hat{\Gamma} \Lambda^T$  得到训练后的测量矩阵.

#### 6.3.1 基于 SVD 的训练算法

基于 SVD 的训练算法变形目标函数为<sup>[39]</sup>

$$\|\Lambda - \sum_{i=1, i \neq j}^M \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T - \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T\|_F^2 = \|E_j - \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T\|_F^2 \quad (34)$$

其中对角矩阵  $\Lambda$  的特征值按递减顺序排列为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ ,  $\mathbf{v}_j$  为  $[\lambda_1, \dots, \lambda_N]$  按元素乘以  $\Gamma$  的第  $j$  行, 即  $\mathbf{v}_j = [\lambda_1 \tau_{j,1}, \dots, \lambda_N \tau_{j,N}]^T$ . 记  $U_j \Delta U_j^T$  为  $E_j$  的特征值分解,  $\xi_{1,j}$  和  $\mathbf{u}_{1,j}$  分别为  $E_j$  的最大特征值和相应特征向量. 具体算法如算法 3 所示.

### 算法 3 基于 SVD 的训练算法

输入:基矩阵  $\Psi$ ; 测量次数  $M$ ;  
 初始化:特征值分解  $\Psi \Psi^T = \Lambda \Lambda^T$  且非零特征值个数  $r$ ;  $\Gamma = \Phi \Lambda$ ;  
 循环:迭代次数  $j = 1: M$   
 1. 计算  $E_j$  的最大特征值  $\xi_{1,j}$  和对应特征向量  $\mathbf{u}_{1,j}$ ;  
 2. 通过  $[\lambda_1 \tau_{j,1}, \dots, \lambda_N \tau_{j,N}]^T = \sqrt{\xi_{1,j}} \mathbf{u}_{1,j}$  更新  $\hat{c}_j$  的前  $r$  个元素;  
 输出:测量矩阵  $\hat{\Phi} = \hat{\Gamma} \Lambda^T$

此算法可提高矩阵  $G = \Theta^T \Theta$  非对角元素幅值小的概率, 即能使不同列尽可能的正交. 相比 Elad 算法, 此训练算法更快且矩阵重构性能更好. 缺陷在于: 该算法只消去  $M$  个成分, 无法使目标函数值归 0. 而且, 每次迭代中求取平方根会使矩阵中元素出现复数.

#### 6.3.2 基于梯度的训练算法

假设存在矩阵  $\Gamma$  满足  $\Gamma^T \Gamma \approx \Lambda^{-1}$ , 则目标函数变形为<sup>[40,41]</sup>

$$F \triangleq \|\Gamma^T \Gamma - \Lambda^{-1}\|_F^2 \quad (35)$$

由于  $\Psi \Psi^T$  是对称矩阵,  $\Lambda$  是对角矩阵, 则可计算

出  $\mathbf{A}^{-1}$ . 为避免特征值为零, 使用伪逆矩阵  $\mathbf{A}^\dagger$  代替  $\mathbf{A}^{-1}$ . 假设  $\mathbf{F}$  中元素为  $\gamma_{ij}$ , 利用下述迭代过程

$$\gamma_{ij} \leftarrow \gamma_{ij} - \rho \nabla F \quad (36)$$

其中  $\rho > 0$  为步长,  $F$  的梯度  $\nabla F \equiv \partial F / \partial \gamma_{ij}$  可表示为

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma_{ij}} = 4\mathbf{F}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{A}^{-1}) \quad (37)$$

则每次迭代按下述方式更新  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F}_{i+1} = \mathbf{F}_i - \eta \mathbf{F}_i (\mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_i - \mathbf{A}^{-1}) \quad (38)$$

其中  $\eta$  是迭代步长. 具体算法如算法 4 所示.

#### 算法 4 基于梯度的训练算法

输入: 基矩阵  $\mathbf{\Psi}$ ; 步长  $\eta$ ; 最大迭代次数  $\text{Iter}_{\max}$

初始化: 列单位化的高斯随机矩阵  $\mathbf{\Phi}$ ; 特征值分解  $\mathbf{\Psi}\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$ ;  $\mathbf{G} = \mathbf{\Phi}\mathbf{V}$ ;  $\mathbf{Z} = \mathbf{A}^{-1}$ ;

循环: 迭代次数  $p = 1: \text{Iter}_{\max}$

$\mathbf{F} = \mathbf{G} - \eta \mathbf{F}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{Z})$ ;

输出: 测量矩阵  $\hat{\mathbf{\Phi}} = \hat{\mathbf{F}}\mathbf{V}^T$

此算法得到的测量矩阵的 Gram 矩阵非对角元素幅值分布、最大元素以及非对角线元素平均值等方面均优于 Elad 和基于 SVD 的训练算法. 从算法复杂度来看, 此算法快于 Elad 算法, 比基于 SVD 的训练算法慢, 且算法对步长  $\eta$  不敏感,  $\eta$  越大, 算法收敛越快.

### 6.4 基于 ETF 的训练算法

针对已知的  $\mathbf{\Psi}$ , 感知矩阵可表示为  $\mathbf{\Theta} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}$ , 基于 ETF 的训练算法的目标是训练测量矩阵  $\mathbf{\Phi}$  来最小化  $\mathbf{\Theta}$  的列相干性  $\mu^{[42]}$ . 具体算法如算法 5 所示.

#### 算法 5 基于 ETF 的训练算法

输入: 基矩阵  $\mathbf{\Psi}$ ; 最大迭代次数  $\text{Iter}_{\max}$

初始化: 列单位化的高斯随机矩阵  $\mathbf{\Phi}$ ,  $\mathbf{\Theta} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}$ ;

循环: 迭代次数  $p = 1: \text{Iter}_{\max}$

1. 计算矩阵  $\mathbf{G} = \mathbf{\Theta}^T \mathbf{\Theta}$ , 其元素表示为  $g_{ij}$ ;

2. 将矩阵  $\mathbf{G}$  投影到凸集合  $\mathbf{A}^N$  得投影矩阵

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ g_{ij}, & \text{abs}(g_{ij}) < \mu_w; \\ \text{sign}(g_{ij}) \cdot \mu_w, & \text{else} \end{cases}$$

3. 选择  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) 更新 Gram 矩阵

$$\mathbf{G}_{p+1} = \alpha \mathbf{G}_p + (1 - \alpha) \mathbf{G}_{p-1};$$

4. 通过 QR 分解与特征值分解来更新测量矩阵  $\mathbf{\Phi}$ ;

输出: 测量矩阵  $\hat{\mathbf{\Phi}}$ .

其中凸集合  $\mathbf{A}^N$  定义如下:

$$\mathbf{A}^N = \{ \mathbf{G}_\Lambda \in \mathbf{R}^{N \times N}: \mathbf{G}_\Lambda = \mathbf{G}_\Lambda^T \text{ding } \mathbf{G}_\Lambda = 1, \max_{i \neq j} |g_{ij}| \leq \mu_w \} \quad (39)$$

在压缩感知应用中, 此算法得到的测量矩阵不仅

能够提高信号重构精度, 而且能够降低精确重构所需的测量次数, 同时重构性能也高于随机测量矩阵和其他训练算法得到的测量矩阵.

## 7 最大 Welch 界等式测量矩阵

部分傅里叶矩阵, 部分哈达玛矩阵和准托普利兹矩阵都是从  $N \times N$  矩阵中随机抽取  $M$  行并列单位化得到的矩阵, 其列随机选取方案有一定的失败可能. 探索满足或者接近 ETF 的行组合受到了很多学者的关注<sup>[44]</sup>.

理论分析构造 ETF 只能在特殊情况下完成, 但数值搜索只能获得接近 ETF 的矩阵. 对  $M \times N$  矩阵  $\mathbf{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1, \dots, \boldsymbol{\phi}_N]$ , 分别定义均方根 (root-mean-square, rms) 互相关函数和最大互相关函数如下

$$\mu_{\text{rms}}(\mathbf{\Phi}) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N |\boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{\phi}_j|^2} \quad (40)$$

$$\mu_{\text{max}}(\mathbf{\Phi}) = \max_{1 \leq i < j \leq N} |\boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{\phi}_j| \quad (41)$$

对任意  $M \times N$  矩阵  $\mathbf{\Phi}$ , 都成立<sup>[45]</sup>

$$\mu_{\text{rms}}(\mathbf{\Phi}) \geq \mu_w \quad (42)$$

当且仅当  $\sum_{i=1}^N \boldsymbol{\phi}_i \boldsymbol{\phi}_i^T = (N/M) \mathbf{I}_M$  时等号成立; 且

$$\mu_{\text{max}}(\mathbf{\Phi}) \geq \mu_w \quad (43)$$

若式(42)中等号成立, 称矩阵  $\mathbf{\Phi}$  为 Welch 界等式矩阵; 若式(43)中等号成立, 称矩阵  $\mathbf{\Phi}$  为最大 Welch 界等式矩阵, 此时矩阵是 ETF. 因此最大 Welch 界等式矩阵亦可适用于压缩感知.

### 7.1 差集构造算法

交换群  $\mathbf{Z}_N \triangleq \{1, \dots, N-1\}$  中子集  $\mathbf{D} = \{d_1, d_2, \dots, d_M\}$  称为  $(N, M, \lambda)$  差集, 若  $M(M-1)$  个差<sup>[46]</sup>

$$(d_k - d_l) \bmod N, k \neq l \quad (44)$$

取遍  $1, 2, \dots, N-1$ , 且每个值取相同  $\lambda$  次.

定义  $u_N(n) \triangleq e^{2n\pi i/N}$ , 若  $\mathbf{D}$  是  $\mathbf{Z}_N$  中  $(N, M, \lambda)$  差集, 则下述定义的  $M \times N$  矩阵是最大 Welch 界矩阵

$$\mathbf{\Phi}_D = \{ \boldsymbol{\phi}_i, i = 0, \dots, N-1 \} \quad (45)$$

其中对任意  $0 \leq i \leq N-1$ , 都有

$$\boldsymbol{\phi}_i = \frac{1}{\sqrt{M}} (u_N(id_1), u_N(id_2), \dots, u_N(id_M)) \quad (46)$$

Ding 探索了有限域  $\text{GF}(N)$  中循环差集与非循环差集的最大 Welch 界等式矩阵构造<sup>[47]</sup>, 其中  $N = p^m$ ,  $p$  是质数. 设  $\text{GF}(N)$  中全部元素为  $a_0 = 0, a_1, \dots, a_{N-1}$ , 令  $v_p = e^{2\pi i/p}$ ,  $\text{Tr}(x)$  为  $\text{GF}(N)$  到  $\text{GF}(p)$  的迹函数, 对  $\text{GF}(N)$  中任何子集  $\mathbf{D}$ , 由下述向量组 ( $i = 0, 1, \dots, N-1$ )

$$\boldsymbol{\phi}_i = \frac{1}{\sqrt{M}} (v_p^{\text{Tr}(a d_1)}, v_p^{\text{Tr}(a d_2)}, \dots, v_p^{\text{Tr}(a d_M)}) \quad (47)$$

定义的矩阵  $\mathbf{\Phi}_D$  是最大 Welch 界等式矩阵. 2007 年 Ding

和 Feng 提出了以上述构造为特例的算法<sup>[48]</sup>. 设  $(G, +)$  为  $N$  阶有限交换群,  $G$  的字符  $\chi$  是从  $G$  到乘法群  $U$  的同态映射, 记  $G$  中所有字符为  $\{\chi_0, \dots, \chi_{N-1}\}$ , 对  $G$  中任意子集  $D$ , 由下述向量组  $(i=0, 1, \dots, N-1)$

$$\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{M}} (\chi_i(d_1), \chi_i(d_2), \dots, \chi_i(d_M)) \quad (48)$$

构成的矩阵  $\Phi_D$  是最大 Welch 界等式矩阵.

### 7.2 数值搜索算法

Love 等人提出从一组随机产生的矩阵中搜索具有最小  $\mu_{\max}$  值矩阵的算法<sup>[44]</sup>. 为了提高搜索效率, Xia 等人利用球体矢量化求解下述最优化问题来逼近最大 Welch 界矩阵<sup>[45]</sup>

$$\min_{\Phi} E_g [1 - |\varphi_*^T(g) \cdot g|^2] \quad (49)$$

其中  $\varphi_*(g) = \arg \min_{\varphi \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}} 1 - |\varphi^T g|^2$ , 且列向量  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  与随机源输入向量  $g$  均是复单位超球面  $\Omega^M$  上  $M \times 1$  向量. 广义 Lloyd 算法可获取矢量化器<sup>[49,50]</sup>, 但  $\mu_{\max}(\Phi^{(n)})$  一般不收敛, 其中  $\Phi^{(n)}$  是第  $n$  次迭代的矩阵. Xia 提出下述 Modified Lloyd Search (MLS) 算法来改善收敛情况.

#### 算法 6 Modified Lloyd Search 算法

1. 随机选取一组在  $\Omega^M$  上一致分布的源输入初值;
2. 对每个初值应用广义 Lloyd 算法迭代数次;
3. 记录每次广义 Lloyd 算法迭代过程输出的量化矩阵, 并且寻找具有最小  $\mu_{\max}$  的矩阵
4. 重复 1-3 步直到搜索到好的矩阵

## 8 仿真实验

本节从四类算法中各选一种作为代表, 即多项式确定性测量矩阵、离散 Chirp 编码确定性测量矩阵、Eald 算法以及差集构造部分 FFT 矩阵, 从多种角度与高斯随机矩阵比较来说明.

### 8.1 实验一

针对多项式确定性测量矩阵, 取  $r=2$  与  $p=11$ , 构造  $121 \times 1331$  测量矩阵  $\Phi$ , 计算其累积相关性, 其中  $K$  的取值从 1 到 16. 由图 4 可知, 多项式确定性测量矩阵在相关性意义上优于高斯随机矩阵.

### 8.2 实验二

针对离散 Chirp 编码确定性测量矩阵, 取  $M=67$ , 构造  $67 \times 4489$  测量矩阵  $\Phi$ , 对任意  $\Gamma \subset \{1, \dots, N\}$  且  $|\Gamma|=K$ , 其中  $K$  的取值从 1 到 20, 计算矩阵  $G = \Phi_{\Gamma}^T \Phi_{\Gamma}$  的最大和最小特征值, 重复 1 万次, 统计平均值. 由图 5 可知, 离散 Chirp 编码确定性测量矩阵在条件数意义上与高斯随机矩阵相当.

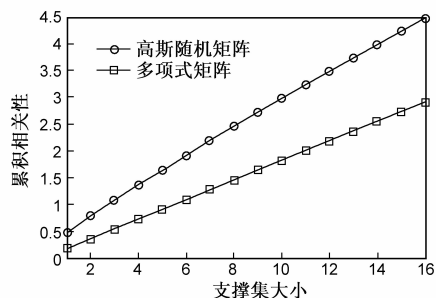


图4 累积相关性比较图

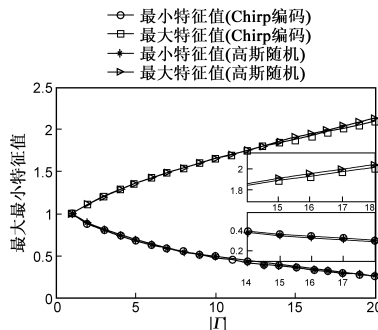


图5 最大最小特征值比较图

### 8.3 实验三

针对 Elad 算法, 初始  $30 \times 128$  高斯随机矩阵  $\Phi$ , 基矩阵  $\Psi$  为  $128 \times N$  高斯随机矩阵,  $\text{Iter}_{\max} = 200, t = 0.2, r = 0.8$ . 计算矩阵列相关性, 以 5 为步长从 160 到 250 变换  $N$  值. 由图 6 可知, 相比高斯随机矩阵, Elad 算法构造的确定性测量矩阵有更低的列相关性.

### 8.4 实验四

$M \times N$  的部分 FFT 矩阵可表示为

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}u_1} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{N}u_1(N-1)} \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}u_2} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{N}u_2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}u_M} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{N}u_M(N-1)} \end{bmatrix} \quad (50)$$

其中  $u = \{u_1, \dots, u_M\}$ , 元素  $u_m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  且互不相等. 当  $(M, N, u)$  有表 1 中组合时, 矩阵  $\Phi(u)$  是最大 Welch 界等式矩阵.

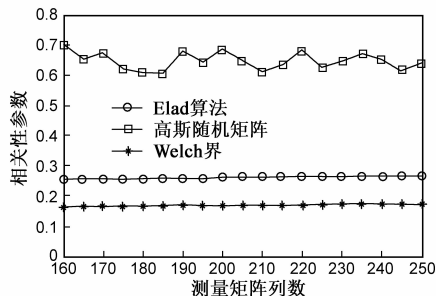


图6 列相关性比较图

表 1 基于差集的部分 FFT 矩阵构造

$M$	$N$	$U$	$\mu_{\max}$	Welch 界
3	7	{1,2,4}	0.4714	0.4714
4	7	{0,3,5,6}	0.3536	0.3536
4	13	{0,1,3,9}	0.4330	0.4330
5	21	{3,6,7,12,14}	0.4000	0.4000
6	31	{1,5,11,24,25,27}	0.3727	0.3727
8	57	{1,6,7,9,19,38,42,49}	0.3307	0.3307
9	73	{1,2,4,8,16,32,37,55,64}	0.3143	0.3143

## 9 算法的性能评价

由上文可知,测量矩阵的性能会直接影响压缩感知过程的效果.如何评价这些矩阵构造算法是一个值得深入研究的问题.下面从 5 种评价标准定性讨论算法的性能.

(1)RIP. RIP 可保证  $K$  稀疏信号  $x$  不在  $\Phi$  的零空间

内,即重构信号  $\hat{x}$  有唯一解.除此之外, RIP-1, StRIP 和 UStRIP 都被用来衡量不同构造算法得到的矩阵.

(2)列相干性.作为 RIP 的弱化条件,列相干性亦可用来评价测量矩阵的性能.列相干性,累计相干性函数,平均互相关函数以及  $K$  集合相干性<sup>[50]</sup> 都可用于评价矩阵的相干性能.

(3)构造计算复杂度.为适用实时性要求较高的场合,设计计算复杂度较低的构造算法可明显降低系统的负担,节约编解码端的资源.

(4)矩阵维数.为适应大尺度实际应用,测量矩阵的维数应尽可能不受限制,即  $M$  和  $N$  应尽可能取任意整数.

(5)重构性能.解码端进行信号重构时,必须以测量矩阵为先验知识,与高斯随机矩阵的重建性能比较可评价该确定性测量矩阵的效果.

表 2 全面总结了前文所述构造算法,并从满足 RIP 种类、列相干性、构造计算复杂度、矩阵维数是否受限以及重构性能方面详细比较了各种构造算法.

表 2 各种算法构造矩阵的性能综述表

构造算法	满足何种 RIP	是否满足列相干性	矩阵构造计算复杂度	矩阵维数是否受限	重构性能与高斯随机矩阵比较结果
多项式矩阵	RIP	未验证	复杂	$M = p^2, N = p^{r+1}$	优
基于膨胀图的矩阵	RIP-1	未验证	复杂	$M = q^{m+1}, N = q^n$	未验证
离散 Chirp 编码矩阵	UStRIP	满足	$KM \log M$	$N = M^2$	相当
二阶 Reed-Muller 编码矩阵	UStRIP	满足	$K^2 \log^{2+o(1)} N$	$M = 2^m, N = 2^{m(m+1)/2}$	未验证
离散编码托普利兹矩阵	UStRIP	满足	简单	否	未验证
轮换托普利兹矩阵	RIP	满足	简单	否	劣
交互投影算法	RIP	满足	复杂	特定 $(M, N)$ 组合	优
Elad 算法	RIP	满足	复杂	否	优
基于梯度的算法	RIP	满足	复杂	否	优
基于 SVD 的算法	RIP	满足	复杂	否	优
基于 ETF 的算法	RIP	满足	复杂	否	优
差集构造算法	RIP	满足	简单	$D$ 为 $(N, M, \lambda)$ 差集	优
数值搜索算法	RIP	满足	复杂	否	优

## 10 结论

本文对现有国内外压缩感知理论确定性测量矩阵的构造算法进行了简要分类介绍和比较,总结了各种构造结果的优缺点.随着压缩感知理论在实际应用中的发展和推广,对测量矩阵的构造算法简易度,鲁棒性,收敛速度,重构性能会越来越高,本文所述的算法为后续的研究奠定了一定的基础,因此可通过算法的互补结合或者调整来探索满足有限等距性质(RIP)条件要求和矩阵列相干性要求的确定性测量矩阵.

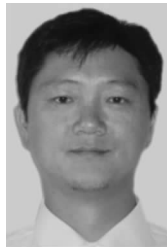
## 参考文献

- [1] D L Donoho. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289 - 1306.
  - [2] E Candès. Compressive sampling [A]. Proceeding of IEEE ICM'06 [C]. Madrid: IEEE Press, 2006. 1433 - 1452.
  - [3] 马坚伟,等. 压缩感知及其应用:从稀疏约束到低秩约束优化 [J]. 信号处理, 2012, 28(5): 609 - 623.
- MA Jian-wei, et al. Compressive sensing and its application: from sparse to low-rank regularized optimization [J]. Signal

- Processing, 2012, 28(5): 609 – 623.
- [4] M Aharon, et al. The K-SVD: An algorithm for designing of over complete dictionaries for sparse representations[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 54(11): 4311 – 4322.
- [5] C D Sigg, et al. Learning dictionaries with bounded self-coherence[J]. IEEE Signal Processing Letter, 2012, 19(12): 861 – 864.
- [6] S Mallat. A Wavelet Tour of Signal Processing [M]. San Diego: Academic Press, 1996.
- [7] H Rauhut, et al. Compressed sensing and redundant dictionaries [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008, 54(5): 2210 – 2219.
- [8] Marco F Duarte. Introduction to Compressive Sensing [OL]. <http://cnx.org/content/m37170/latest/?Collection=col11355/latest>, 2012-05-20.
- [9] 焦李成, 杨淑媛, 等. 压缩感知回顾与展望[J]. 电子学报, 2011, 7(7): 1651 – 1662.  
JIAO Li-cheng, YANG Shu-yuan, et al. Development and prospect of compressive sensing[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 7(7): 1651 – 1662. (in Chinese)
- [10] 杨海蓉, 等. 压缩传感理论与重构算法[J]. 电子学报, 2011, 39(1): 142-148.  
YANG Hai-rong, et al. The theory of compressed sensing and reconstruction algorithm[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(1): 142 – 148. (in Chinese)
- [11] S J Kim, et al. An interior-point method for large-scale  $l_1$  regularized least squares[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2007, 1(4): 606 – 617.
- [12] M A T Figueiredo, et al. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2007, 1(4): 586 – 597.
- [13] J A Tropp, A C Gilbert. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655 – 4666.
- [14] W Dai, O Milenkovic. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(5): 2230 – 2249.
- [15] D Needell, J A Tropp. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2008, 26(3): 301 – 321.
- [16] B S Chen, et al. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1998, 20(1): 33 – 61.
- [17] 李志林, 等. 一种有效的压缩感知图像重建算法[J]. 电子学报, 2011, 39(12): 2796 – 2800.  
LI Zhi-lin, et al. An efficient algorithm for compressed sensing image reconstruction [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(12): 2796 – 2800. (in Chinese)
- [18] E Candès, et al. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489 – 509.
- [19] J A Tropp. Greed is good: Algorithmic results for sparse approximation[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2004, 50(10): 2231 – 2242.
- [20] M A Sustik, et al. On the existence of equiangular tight frames [J]. Linear Algebra and its Applications, 2007, 426(2 – 3): 619 – 635.
- [21] R A Devore. Deterministic construction of compressed sensing matrices[J]. Journal of complexity, 2007, 23(4 – 6): 918 – 925.
- [22] 李小波. 基于压缩感知的测量矩阵研究[D]. 北京: 北京交通大学硕士学位论文, 2010.  
Li Xiao-Bo. The Research of Measurement Matrix Based on Compressed Sensing [D]. Beijing: A Dissertation of Beijing Jiao Tong University, 2010. (in Chinese)
- [23] S Jafarpour, et al. Efficient and robust compressed sensing using optimized expander graphs[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(9): 4299 – 4308.
- [24] M Raginsky, et al. Performance bounds for expander-based compressed sensing in Poisson noise [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(9): 4139 – 4153.
- [25] V Guruswami, et al. Unbalanced expanders and randomness extractors from parvaresh-varshney codes[J]. Journal of Association for Computing Machinery, 2009, 56(4): 1 – 34.
- [26] S Li, et al. Deterministic construction of compressed sensing matrices via algebraic curves[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(8): 5035 – 5041.
- [27] R Calderbank, et al. Construction of a large class of deterministic sensing matrices that satisfy a statistical isometry property [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4(2): 358 – 374.
- [28] L Applebaum, et al. Chirp sensing codes: deterministic compressed sensing measurements for fast recovery [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 26(3): 283 – 290.
- [29] K Ni, S Datta, P Mahanti, et al. Efficient deterministic compressed sensing for images with chirps and reed-muller codes [J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2011, 4(3): 931 – 953.
- [30] A Amini, F Marvasti. Deterministic construction of binary, bipolar, and ternary compressed sensing matrices [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2011, 57(4): 2360 – 2370.
- [31] A Amini, V Montazerhodjat, F Marvasti. Matrices with small coherence using  $p$ -Ary block codes[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(1): 172 – 180.
- [32] 王开, 等. 准 Toeplitz 测量矩阵的有限等距性质分析[J].

- 计算机应用研究, 2011, 28(4): 1512 – 1514.
- Wang Kai, et al. RIP analysis for quasi-Toeplitz measurement matrices[J]. Application Research of Computers, 2011, 28(4): 1512 – 1514. (in Chinese)
- [33] J Haupt, et al. Toeplitz compressed sensing matrices with applications to sparse channel estimation[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(10): 5862 – 5875.
- [34] V SaliGram. Deterministic Designs with Deterministic Guarantees; Toeplitz Compressed Sensing Matrices, Sequence Design and System Identification[OL]. <http://arxiv.org/abs/0806.4958v2>, 2008-07-28.
- [35] R Holger. Circulant and Toeplitz matrices in compressed sensing[OL]. <http://arxiv.org/abs/0902.4394v1>, 2009-02-25.
- [36] J A Tropp, et al. Designing structured tight frames via an alternating projection method[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(1): 188 – 209.
- [37] B Li, Y Shen, J Li. Dictionaries construction using alternating projection method in compressive sensing[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2011, 18(11): 663 – 666.
- [38] M Elad. Optimized projections for compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(12): 5695 – 5702.
- [39] J M Duarte-Carvajalino, G Sapiro. Learning to sense sparse signals: simultaneous sensing matrix and sparsifying dictionary optimization[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2009, 18(7): 1395 – 1408.
- [40] V Abolghasemi, et al. A robust approach for optimization of the measurement matrix in compressed sensing[A]. Proceeding of IEEE IWCIP' 10[C]. Elba; IEEE Press, 2010. 388 – 392.
- [41] A Vahid, et al. A gradient-based alternating minimization approach for optimization of the measurement matrix in compressive sensing[J]. Signal Processing, 2012, 92(3): 999 – 1009.
- [42] J Xu, Y Pi, Z Cao. Optimized projection matrix for compressive sensing[J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2010, (2): 1 – 8.
- [43] L Zelnik-Manor, K Rosenblum, Y C Eldar. Sensing matrix optimization for block-sparse decoding[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(9): 4300 – 4312.
- [44] D J Love, et al. Grassmannian beamforming for multiple-input multiple-output wireless systems[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2003, 49(10): 2735 – 2747.
- [45] P Xia, S Zhou, G B Giannakis. Achieving the Welch bound with difference sets[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(5): 1900 – 1907.
- [46] D R Stinson. Combinatorial Designs: Constructions and Analysis[M]. New York: Springer-Verlag, 2004.
- [47] C Ding. Complex codebooks from combinatorial designs[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(9): 4229 – 4235.
- [48] C Ding, T Feng. A generic construction of complex codebooks meeting the Welch bound[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4245 – 4250.
- [49] P Xia, G B Giannakis. Design and analysis of transmit beamforming based on limited-rate feedback[A]. Proceeding of IEEE VTC'04[C]. Los Angeles, CA: IEEE Press, 2004. 26 – 29.
- [50] S Hong, H Park, et al. A new performance measure using  $k$ -set correlation for compressed sensing matrices[J]. IEEE Signal Processing Letter, 2012, 19(3): 143 – 146.

#### 作者简介



王 强 男, 1975 年出生于辽宁沈阳. 哈尔滨工业大学控制科学与工程系教授、博士生导师. 主要研究方向为多传感器数据融合, 图像处理, 智能检测技术等.

E-mail: wangqiang@hit.edu.cn



李 佳 男, 1986 年出生于河北衡水. 2010 年、2012 年获得哈尔滨工业大学理学学士和工学硕士学位, 现为哈尔滨工业大学博士研究生. 研究方向为压缩感知、图像处理、无线传感器网络等.

E-mail: hitsalijia@163.com

沈 毅 男, 1965 年出生于吉林扶余. 哈尔滨工业大学控制科学与工程系教授、博士生导师. 主要研究方向为导航、制导与控制, 故障诊断和数字超声成像技术.